
УДК 681.3

Анализ влияния аддитивных негауссовских помех на точность измерения параметров движения в радиосистемах ближнего действия

В.М. Артюшенко, д.т.н., профессор,
Государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования Московской области
«Технологический университет», г. Королев, Московская область,
В.И. Воловач, к.т.н., доцент, зав.кафедрой Поволжского государственного университета сервиса, г. Тольятти

Осуществлен анализ влияния негауссовских аддитивных помех на точность оценки параметров полезного сигнала, несущих информацию о движении лоцируемого объекта, находящегося на малых расстояниях от радиолокационного измерителя. Проведена оценка потенциальной точности измерения информационные параметры сигнала на фоне негауссовских аддитивных помех. Получены инженерные оценки информационных параметров сигнала на фоне аддитивных негауссовских помех, имеющих как коррелированный, так и независимый характер.

Потенциальная точность измерения, негауссовские аддитивные помехи, радиосистемы ближнего действия.

Analysis of influence of additive non-Gaussian noise on accuracy of motion parameters measurement in short-range radio systems

V.M. Artyushenko, Doctor of Technical Sciences, Professor,
State Educational Institution of Higher Education
Moscow Region «University of technology», Korolev, Moscow region,
V.I. Volovach, Ph.D., associate professor, head of department of the Volga State University of Service, Tolyatti

The analysis of the influence of non-Gaussian additive noise on the accuracy of estimates of the parameters of useful signal, carrying information about the movement of detected object located at a small distances from the radar meter was carried out. Estimation of potential accuracy of the measurement of informative signal parameters on background of non-Gaussian additive noise was obtained. Engineering estimations of the informative signal parameters on the background of additive non-Gaussian noise, with both correlated and independent nature were found.

Potential measurement accuracy, non-Gaussian additive noise, short-range radio system.

В статье рассматриваются вопросы оценки параметров сигнала, несущих информацию о движении объектов и находящихся под воздействием аддитивных негауссовских помех.

Оценка информационных параметров проводилась в дискретном времени наблюдения, причем оценке подлежали только неэнергетические информационные параметры. Для определения количественных оценок измеряемых параметров использованы нижние границы неравенства Крамера-Рао. Для оценки влияния негауссовских помех на точность измерения используется отношение дисперсии погрешности измерения при наличии аддитивных помех к дисперсии погрешности измерения при воздействии гауссовских помех.

Осуществлена оценка точности скалярного информационного параметра на фоне аддитивной некоррелированной помехи. Показано, что с увеличением отличия ПРВ информационного параметра и воздействующей аддитивной негауссовской помехи от гауссовской величина приведенной дисперсии уменьшается, что приводит к увеличению точности оценки измеряемого информационного параметра.

Произведена оценка точности измерения векторного информационного параметра на фоне аддитивной некоррелированной помехи для случаев взаимной зависимости и независимости оцениваемых параметров. Показано, что нижние границы дисперсии оценок частоты и фазы минимальны, если привязка измерений осуществляется к середине интервала наблюдения. Так же, как и в предыдущем случае, увеличение отличия ПРВ аддитивной негауссовской помехи от ПРВ гауссовской помехи приводит к большему выигрышу в точности оцениваемого параметра.

Произведена оценка точности измерения информационных параметров сигнала на фоне коррелированных аддитивных негауссовских помех. Показано, что увеличение коэффициента корреляции приводит к увеличению обобщенного отношения «сигнал/помеха», что в свою очередь приводит к уменьшению погрешности измерения информационного параметра. Отмечается, что апостериорная дисперсия измерения информационного параметра при воздействии негауссовской помехи меньше, когда помеха имеет коррелированный характер. Доказано, что увеличение отличия переходной ПРВ от гауссовской, приводит к увеличению точности оцениваемого информационного параметра. Также показано, что на приведенную погрешность измерения информационного параметра оказывают влияние как величина приведенного обобщенного отношения «сигнал/помеха», так и константа, определяемая параметром ПРВ.

Показано, что в случае совместной оценки (измерения) нескольких информационных параметров полезного сигнала на фоне некоррелированной негауссовской помехи, предельная эффективность оценки (измерения) является такой же, как и в случае измерения одного информационного параметра.

Вопросы измерения (оценки) параметров сигналов, несущих информацию о движении объектов, в радиолокации являются традиционными и весьма подробно рассмотрены в [1, 2 и др.]. Достаточно хорошо изучены вопросы радиолокационного измерения точечных [3, 4] и отчасти сложных дискретных [5, 6] целей. Вместе с тем многие аспекты, связанные с измерением информационных параметров сигнала, несущих информацию о движении объектов, находящихся на малых расстояниях от радиолокационных измерителей, являются ещё недостаточно изученными и имеют ряд специфических особенностей как теоретического, так и практического характера [7, 8].

В большинстве работ, посвященных вопросам оценки параметров сигналов, считалось, что на полезный сигнал воздействует аддитивная помеха, описываемая, как правило, гауссовской плотностью распределения вероятности (ПРВ). Однако, как показывают исследования [9–11], принимаемый измерителем сигнал подвержен воздействию аддитивных помех, имеющих ярко выраженный негауссовский характер. Для радиолокации, радионавигации, телеметрии, радиоизмерительной техники представляет значительный интерес получить оптимальную оценку параметров обрабатываемых сигналов при наличии помех с произвольной плотностью распределения вероятности.

Как известно, методы решения задачи оптимальной оценки параметров сигнала можно получить, основываясь на математической статистике и теории нелинейной фильтрации [1, 12]. Произведем оценку информационных параметров в дискретном времени наблюдения. Считаем, что в течение времени $[0, T]$ наблюдается выборки случайного процесса $Y_h \equiv Y(t_h)$ ($h = 1, \dots, H$), являющегося смесью полезного сигнала $S(\vec{\lambda}, t_h)$ и аддитивной $n(t_h)$ помехи, имеющей негауссовский характер. Полезный сигнал содержит совокупность параметров $\vec{\lambda} = \{\lambda_1, \dots, \lambda_m\}$, подлежащих измерению (оцениванию), причем считается, что на интервале наблюдения эти параметры остаются неизменными. Для определения количественных оценок измеряемых параметров используем нижние границы неравенства Крамера-Рао [1, 12, 13]. Влияние негауссовских аддитивных помех на точность измерения будем оценивать отношением дисперсии погрешности измерения при наличии аддитивных помех к дисперсии погрешности измерения, когда эти помехи носят гауссовский характер.

Заметим, что оценке будут подлежать только неэнергетические информационные параметры полезного сигнала. При этом считается, что оценки являются функциями достаточных статистик и обладают асимптотическими свойствами состоятельности, как правило, несмещенности и нормальности.

Известно, что оценка $\hat{\lambda}$ информационного параметра λ полезного сигнала $s(\lambda, t)$ по максимуму апостериорной ПРВ находится из уравнения

$$\left. \frac{dW_y(\lambda)}{d\lambda} \right|_{\lambda = \hat{\lambda}} = 0. \quad (1)$$

Учитывая, что $W_y(\lambda) = CW_\lambda(\lambda)W_\Pi(\lambda)$, где C – постоянная нормировки; $W_\lambda(\lambda)$ – априорная ПРВ; $W_\Pi(\lambda)$ – функция правдоподобия, запишем:

$$\left. \frac{dW_y(\lambda)}{d\lambda} \right|_{\lambda = \hat{\lambda}} = \left[\frac{d \ln W_\Pi(\lambda)}{d\lambda} + \frac{d \ln W_\lambda(\lambda)}{d\lambda} \right]_{\lambda = \hat{\lambda}} = 0. \quad (2)$$

Откуда, в соответствии с теоремой Крамера-Рао, дисперсия любой несмещенной оценки информационного параметра определяется неравенством [12]

$$M\{(\hat{\lambda} - \lambda)^2\} \geq \left[-M\left\{\frac{d^2 \ln W_{\Pi}(\lambda)}{d\lambda^2}\right\} - M\left\{\frac{d^2 \ln W_{\lambda}(\lambda)}{d\lambda^2}\right\} \right]^{-1}, \quad (3)$$

где усреднение осуществляется по результатам наблюдения и характеристикам случайного параметра λ .

Преобразуем (3) к виду:

$$M\{(\hat{\lambda} - \lambda)^2\} \geq \left[-M\left\{\frac{d^2 \ln W_{\Pi}(\lambda)}{d\lambda^2}\right\} + I_{\phi}^{\lambda} \right]^{-1}, \quad (4)$$

где $I_{\phi}^{\lambda} = -M\left\{\frac{d^2 \ln W_{\lambda}(\lambda)}{d\lambda^2}\right\}$ – количество информации по Фишеру, заключенное в одномерном ПРВ $W_{\lambda}(\lambda)$.

1. Оценка точности измерения скалярного информационного параметра на фоне аддитивной некоррелированной помехи. Конкретизируем неравенство Крамера-Рао для случая воздействия аддитивных негауссовских помех с независимыми значениями.

Пусть на вход измерительного радиолокационного устройства поступает аддитивная смесь вида $y_h = s(\lambda, t_h) + n_h$, полезного сигнала $s(\lambda, t_h)$, несущего информацию об одном из интересующих нас параметре движения лоцируемого объекта λ , и аддитивная негауссовская некоррелированная помеха $n(t_h)$.

Считаем, что логарифм функции правдоподобия (ЛФП), входящий в (4), существует и имеет вид: $B_n(n_h) = \ln W_n\{y_h - s(\hat{\lambda}, t_h)\}$, в котором $W_n\{\cdot\}$ – одномерная ПРВ аддитивной негауссовской помехи.

Первая производная от ЛФП по информационному параметру будет равна:

$$B_{\lambda,h}^{I'} = \frac{d}{d\hat{\lambda}} \ln W_n\{y_h - s(\hat{\lambda}, t_h)\} = s'_{\lambda}(\hat{\lambda}, t_h) \frac{d}{dn_h} \ln W_n(n_h) = s'_{\lambda}(\hat{\lambda}, t_h) B_{n,h}^{II'}$$

Соответственно, вторая производная

$$B_{\lambda,h,h}^{II''} = \{y_h - s(\hat{\lambda}, t_h)\} = [s'_{\lambda}(\hat{\lambda}, t_h)]^2 \frac{d^2}{dn_h^2} \ln W_n(n_h) + s''_{\lambda}(\hat{\lambda}, t_h) \frac{d}{dn_h} \ln W_n(n_h) = [s'_{\lambda}(\hat{\lambda}, t_h)]^2 B_{n,h,h}^{II''} + s''_{\lambda}(\hat{\lambda}, t_h) B_{n,h}^{II''}$$

Усреднив вторую производную ЛФП по времени и по множеству, запишем:

$$\tilde{B}_{\lambda,h,h}^{II''} = -M\left\{\frac{d^2}{d\hat{\lambda}^2} \ln W_{\Pi}(\hat{\lambda})\right\} = P_s I_{\phi}^{\lambda},$$

где $P_s = \langle [s'_{\lambda}(\hat{\lambda}, t_h)]^2 \rangle = \lim_{H \rightarrow \infty} H^{-1} \sum_{h=1}^H \left[\frac{ds(\hat{\lambda}, t_h)}{d\hat{\lambda}} \right]^2$; $I_{\phi}^{\lambda} = M\left\langle \frac{d^2}{dn_h^2} \ln W_n(n_h) \right\rangle$

– количество информации по Фишеру относительно аддитивной негауссовской

помехи, заключенное в одномерном ПРВ $W_n(n_h)$.

С учетом введенных обозначений, представим неравенство Крамера-Рао в виде:

$$\sigma_{\lambda n}^2 \geq \left\{ P_s \mu_n^2 \sigma_n^{-2} + \mu_\lambda^2 \sigma_\lambda^{-2} \right\}^{-1}, \quad (7)$$

где μ_n^2 и μ_λ^2 – коэффициенты, учитывающие повышение точности демодуляции информационного процесса за счет отличия, соответственно, ПРВ перехода информационного процесса и аддитивной помехи от гауссовских. При негауссовских помехах всегда $\mu^2 > 1$ [14].

Введем обозначение $\rho_n = P_s \sigma_\lambda^2 / \sigma_n^2$, играющее в данном случае роль обобщенного отношения сигнал-помеха. В этом случае выражение (7) запишется:

$$\sigma_{\lambda n}^2 \geq \sigma_\lambda^{-2} \left\{ \rho_n \mu_n^2 + \mu_\lambda^2 \right\}^{-1}. \quad (8)$$

Полученные неравенства (7) и (8) описывают нижние границы неравенства Крамера-Рао для дисперсии несмещенной оценки информационного параметра полезного сигнала при воздействии аддитивной негауссовской помехи с независимыми значениями.

Произведем количественную оценку точности измерения, получаемую в результате учета негауссовского характера как ПРВ информационного параметра $\hat{\lambda}$, так и воздействующей аддитивной помехи n_h . Для этого построим зависимости приведенной дисперсии, $\delta_{\lambda n}^2 = f(\sigma_{\lambda n}^2 / \sigma_{\lambda gn}^2)$, где $\sigma_{\lambda gn}^2$ – дисперсия нормальной погрешности измерения (оценки), рассчитанная для случая, когда информационный параметр и аддитивная помеха являются случайными гауссовскими процессами, описываемыми одномерными распределениями. При этом будем считать, что обобщенное ОСП ρ_n в обоих случаях равны между собой.

Учитывая, что для гауссовских некоррелированных процессов коэффициент $\mu^2 = 1$ [14], исходя из выше сказанного, получим:

$$\delta_{\lambda n}^2 = \frac{\sigma_{\lambda n}^2}{\sigma_{\lambda gn}^2} = \frac{(\rho_n + 1)}{\rho_n \mu_n^2 + \mu_\lambda^2}. \quad (9)$$

На рисунке 1 представлены графические зависимости $\delta_{\lambda n}^2 = f(\mu_\lambda^2, \mu_n^2)$, построенные для случаев $\rho_n = 1$ и $\rho_n = 10$.

Из выражения (9) и приведенных графиков видно, что с увеличением коэффициентов μ_λ^2 и μ_n^2 , а, следовательно, с увеличением отличия ПРВ информационного параметра и воздействующей аддитивной помехи от гауссовской величина приведенной дисперсии уменьшается, что в свою очередь приводит к увеличению точности оценки измеряемого информационного параметра.

При высоком качестве измерения информационного параметра (больших соотношениях сигнал-помеха) апостериорная плотность распределения вероятности (АПРВ) $W_y(\lambda)$ в окрестности истинного значения λ_n существенно уже

априорной $W_y(\lambda)$ ПРВ [14]. В этом случае значением I_ϕ^λ можно пренебречь, и неравенство Крамера-Рао будет определяться выражением:

$$\sigma_{\hat{\lambda}_m}^2 \geq \{I_\phi^\lambda P_{s'}\}^{-1} = \{\mu_n \sigma_n^{-2} H^{-1} \sum_{h=1}^H [ds(\hat{\lambda}, t_h) / d\hat{\lambda}]^2\}^{-1}. \quad (10)$$

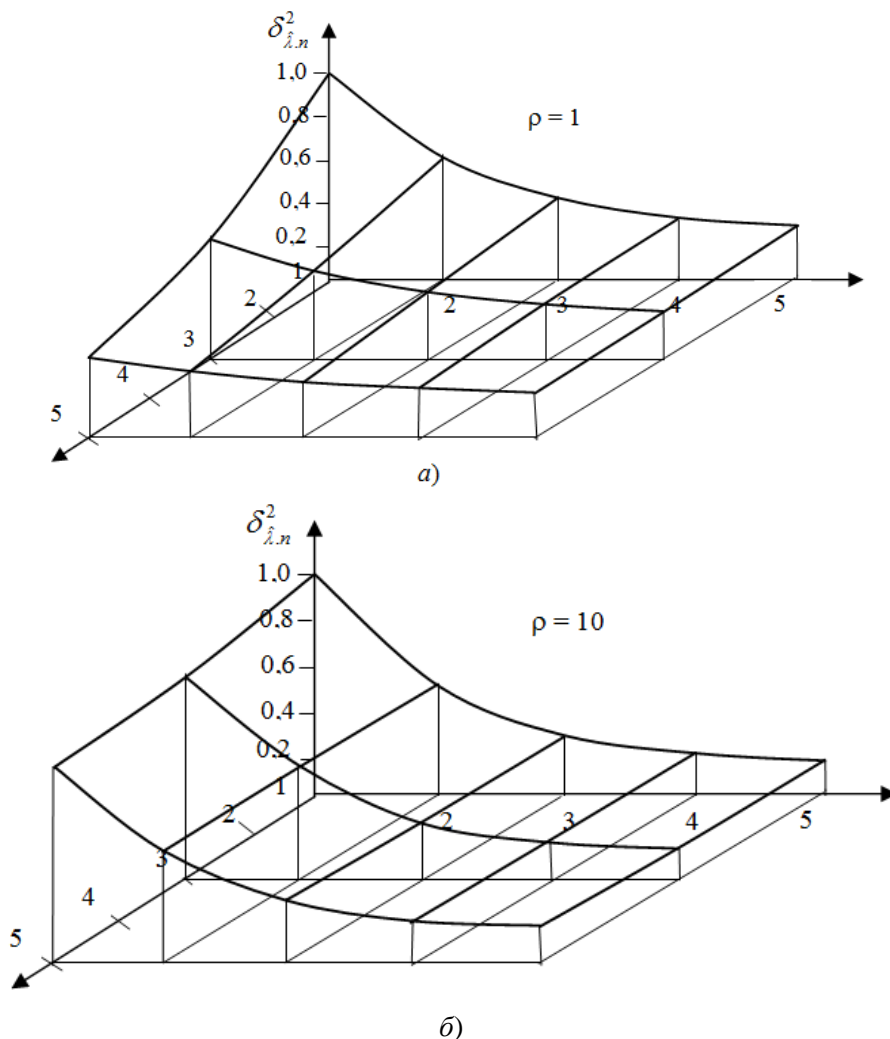


Рисунок 1 – Зависимости $\delta_{\hat{\lambda}, n}^2 = f(\mu_n^2, \mu_\lambda^2)$ при: а – $\rho = 1$; б – $\rho = 10$

На примере измерения (оценки) частоты $\lambda = \omega$ полезного сигнала

$$s(\lambda, t_h) = U_m \cos(\omega t_h + \varphi_h). \quad (11)$$

оценим выигрыш, получаемый при учете негауссовского характера аддитивной помехи. Считаем, что ПРВ измеряемого информационного (оцениваемого) параметра и воздействующей помехи известны и имеют негауссовский характер. Оценка информационного параметра осуществляется на интервале измерения $[0, T]$. Предполагаем, что моменты времени, соответствующие началу и концу обрабатываемого сигнала, точно известны и совпадают с границами интервала изме-

рения. Воспользовавшись изложенной в [12] методикой, а также результатами, связанными с оценкой частоты сигнала на фоне гауссовских помех с независимыми значениями, после опускаемых из-за громоздкости математических преобразований, приняв для удобства $\sigma_\omega^2 = 1$, получим выражение для дисперсии частоты полезного сигнала $s(\lambda, t_h)$ при воздействии негауссовских аддитивных помех с независимыми значениями:

$$\sigma_\omega^2 \geq \left\{ \mu_n^2 \frac{\rho T^2}{12} + \mu_\omega^2 \right\}^{-1}, \quad (12)$$

где $\rho = U_m^2 / 2\sigma_n^2$.

Полученные выражения показывают, что на точность измерения (оценки) частоты полезного сигнала $s(\lambda, t_h)$ при воздействии негауссовской аддитивной помехи с независимыми значениями существенно влияют не только такие параметры как ρ и T , но и величина коэффициентов μ_ω^2 и μ_n^2 , учитывающих, соответственно, отличие ПРВ измеряемого (оцениваемого) информационного параметра и помехи от гауссовской. Как видно из представленного неравенства, чем больше отличие ПРВ оцениваемого параметра и воздействующей помехи от гауссовской, тем точность оценки частоты выше.

2. Оценка точности измерения векторного информационного параметра на фоне аддитивной некоррелированной помехи. Рассмотрим случай одновременного измерения (оценки) нескольких информационных параметров полезного сигнала $s(\vec{\lambda}, t_h)$, $\vec{\lambda} = \{\lambda_1, \dots, \lambda_m\}$, на фоне воздействия негауссовской аддитивной помехи, имеющей некоррелированный характер.

Оценку точности рассмотрим на примере одновременного измерения ω , $\dot{\omega}$ и φ полезного сигнала

$$s(\vec{\lambda}, t_h) = U_{m.h} \sin[(\omega + 0,5\dot{\omega}t_h)t_h + \varphi], \quad (13)$$

несущих информацию о параметрах движения лоцируемого объекта.

Так же, как и в предыдущем случае, будем считать, что оценка измеряемых параметров осуществляется на интервале наблюдения $[0, T]$, причем моменты времени, соответствующие началу и концу обрабатываемого сигнала точно известны и совпадают с границами интервала наблюдения.

Воспользуемся методикой, изложенной [15] для определения одновременной оценки информационных параметров сигнала на фоне гауссовской некоррелированной помехи.

Для удобства проведения дальнейшего анализа представим сигнал $s(\vec{\lambda}, t_h)$ в виде

$$s(\vec{\lambda}, t_h) = U_{m.h} \sin(\lambda_1 + \lambda_2 t_h + \lambda_3 t_h^2), \quad (14)$$

где $\lambda_1 = \varphi$; $\lambda_2 = \omega$; $\lambda_3 = 0,5\dot{\omega}$.

Заметим, что в нашем случае при оценке информационных параметров по максимуму АПРВ должны выполняться три уравнения:

$$\left. \begin{array}{l} \frac{dW_y(\vec{\lambda})}{d\lambda_1} \\ \lambda_1 = \hat{\lambda}_1 \end{array} \right| = 0; \quad \left. \begin{array}{l} \frac{dW_y(\vec{\lambda})}{d\lambda_2} \\ \lambda_2 = \hat{\lambda}_2 \end{array} \right| = 0; \quad \left. \begin{array}{l} \frac{dW_y(\vec{\lambda})}{d\lambda_3} \\ \lambda_3 = \hat{\lambda}_3 \end{array} \right| = 0.$$

Выражение нижней границы неравенства Крамера-Рао для дисперсии несмещенных совместных параметров полезного сигнала $\vec{\lambda} = \{\varphi, \omega, \dot{\omega}\}$ запишется [16]

$$\sigma_{\lambda_{ij}}^2 \geq |J_{ij}|/|J|; \quad i, j = 1, 2, 3, \quad (15)$$

где $|J_{ij}|$ – алгебраическое дополнение элемента J_{ij} информационной матрицы Фишера $\|J\|$; $|J|$ – определитель матрицы $\|J\|$.

Заметим, что элементы информационной матрицы при $i \neq j$ учитывают взаимную зависимость оцениваемых параметров. В случае если измеряемые параметры не зависят друг от друга, информационная матрица упрощается, приобретая вид:

$$\|J\| = \begin{vmatrix} J_{11} & & 0 \\ & J_{22} & \\ 0 & & J_{33} \end{vmatrix}.$$

Дисперсия того или иного параметра при этом будет определяться выражением:

$$\sigma_{a.i}^2 = \sigma_{a.ii}^2 = |J_{ii}|/|J|; \quad i, j = 1, 2, 3.$$

Элементы матрицы определяются соотношением

$$J_{ij} = \int_{h=1}^H h'_{\lambda_i}(\hat{\lambda}_1, \hat{\lambda}_2, \hat{\lambda}_3, t_1, t_h) s'_{\lambda_j}(\hat{\lambda}_1, \hat{\lambda}_2, \hat{\lambda}_3, t_h) \Delta + I_{\phi,ij}^{\lambda}. \quad (16)$$

Здесь: $H = T/\Delta$ – целая часть отношения; $\Delta = h - (h-1)$ – интервал взятия временных отсчетов; t_1 – начало времени измерения; s'_{λ_j} – производная от обрабатываемого полезного сигнала по оцениваемому параметру λ_j ($j = 1, 2, 3$), определяемая при $\vec{\lambda} = \hat{\lambda}$; $I_{\phi,ij}^{\lambda}$ – составляющая информационной матрицы Фишера относительно измеряемых параметров, заключенная в совместной ПРВ оцениваемых параметров $W_{\vec{\lambda}}(\vec{\lambda})$; h'_{λ_i} – производная по параметру λ_j ($j = 1, 2, 3$), определяемая при $\vec{\lambda} = \hat{\lambda}$ от весовой функции $h(\vec{\lambda}, t_1, t_h)$, являющаяся решением уравнения:

$$\sum_{h=1}^H R_n(t_h - t_{h-1}) h(\vec{\lambda}, t_1, t_h) \Delta = s(\vec{\lambda}, t_h),$$

где $R_n(t_h - t_{h-1})$ – корреляционная функция помехи.

В случае δ -коррелированного шума

$$h(\bar{\lambda}, t_1, t_h) = \mu_n^2 N_n^{-2} s(\bar{\lambda}, t_h),$$

где N_n^{-2} – спектральная плотность помехи. Выражение (16) примет вид:

$$J_{ij} = \mu_n^2 \sigma_{n\Delta}^{-2} \sum_{h=1}^H s'_{\lambda,i}(\hat{\lambda}, t_h) s'_{\lambda,j}(\hat{\lambda}, t_h) + I_{\phi,ij}^\lambda, \quad (17)$$

где $\sigma_{n\Delta}^{-2} = N_n^2 / \Delta$ – дисперсия воздействующей помехи в полосе $f = 1 / \Delta$.

Для обрабатываемого сигнала производные будут определяться:

$$s'_{\lambda,i}(\hat{\lambda}, t_h) = U_{mh} t_h^{i-1} \cos(\hat{\lambda}_1 + \hat{\lambda}_2 t_h + \hat{\lambda}_3 t_h^2), \quad i = 1, 2, 3. \quad (18)$$

Сделав необходимые тригонометрические преобразования, получим

$$J_{ij} = 0,5 \mu_n^2 \sigma_{n\Delta}^{-2} \sum_{h=1}^H U_{m,h}^2 t_h^{i+j-2} [1 + \cos 2(\hat{\lambda}_1 + \hat{\lambda}_2 t_h + \hat{\lambda}_3 t_h^2)] + I_{\phi,ij}^\lambda, \quad (19)$$

где принято, что $t = 0$, то есть интервал измерения соответствует $-T \leq t \leq 0$.

Считая, что оцениваемые информационные параметры на интервале измерения остаются неизменными, принимаем, что их величины равны значениям, принимаемым в момент времени окончания интервала измерения.

При значении косинуса в (19), равном единице, что равносильно допущению $\omega T \gg 1$, и большом числе отсчетов ($H \simeq T / \Delta \gg 1$) на интервале оценки информационных параметров получим:

$$J_{ij} = \mu_n^2 \frac{U_m^2}{2\sigma_n^2} (-1)^{i+j-2} T^{i+j-2} (i+j-2)^{-1} + I_{\phi,ij}^\lambda, \quad (20)$$

где $U_m = H^{-1} \sum_{h=1}^H U_{m,h}$; $\sigma_n^2 = \frac{N_n^2}{\Delta H} = N_n^2 / T$ – дисперсия аддитивной помехи.

Обозначив через $\rho = U_m^2 / 2\sigma_n^2$, играющее в данном случае роль обобщенного отношения сигнал/помеха (ОСП), запишем матрицу $\|J\|$ в виде:

$$\|J\| = \left\{ \mu_n^2 \rho \begin{vmatrix} 1 & -0,5T & \frac{1}{3}T^2 \\ -0,5T & \frac{1}{3}T^2 & -0,25T^3 \\ \frac{1}{3}T^2 & -0,25T^3 & 0,2T^4 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} I_{\phi,11}^\lambda & I_{\phi,12}^\lambda & I_{\phi,13}^\lambda \\ I_{\phi,21}^\lambda & I_{\phi,22}^\lambda & I_{\phi,23}^\lambda \\ I_{\phi,31}^\lambda & I_{\phi,32}^\lambda & I_{\phi,33}^\lambda \end{vmatrix} \right\}. \quad (21)$$

Если ПРВ измеряемых (оцениваемых) параметров

$$W_{\bar{\lambda}}(\vec{\lambda}) = \frac{1}{(2\pi\sigma^2)^{3/2} D^{0,5}} \exp \left\{ -\frac{1}{2\pi\sigma^2} \sum_{i=1}^3 \sum_{k=1}^3 D_{i,k} (\lambda_i - a)(\lambda_k - a) \right\},$$

где σ^2 и a – соответственно, дисперсия и среднее значение; D – детерминант матрицы $R_{\bar{\lambda}}$ элементы которой $R_{ik} = R_{ki} = R(\tau_k - \tau_i) = B_{\bar{\lambda}}(\tau_k - \tau_i) / B_{\bar{\lambda}}(0)$ представляют значения нормированной корреляционной функции; D_{ik} – алгебраическое дополнение элемента R_{ik} в матрице, то информационная матрица

$\|I_{\phi,ij}^\lambda\|$ в (21), примет вид:

$$\|I_{\phi,ij}^{\lambda}\| = \frac{1}{(2\sigma^2 D)} \begin{vmatrix} 2D_{11} & D_{12} + D_{21} & D_{13} + D_{31} \\ D_{21} + D_{12} & 2D_{22} & D_{23} + D_{32} \\ D_{31} + D_{13} & D_{32} + D_{23} & 2D_{33} \end{vmatrix}.$$

При оценке информационных параметров методом максимального правдоподобия корреляционная матрица ошибок (21) примет вид:

$$\|J\| = \mu_n^2 \rho \begin{vmatrix} 1 & -0,5T & \frac{1}{3}T^2 \\ -0,5T & \frac{1}{3}T^2 & -0,25T^3 \\ \frac{1}{3}T^2 & -0,25T^3 & 0,2T^4 \end{vmatrix}. \quad (21a)$$

Определитель матрицы в этом случае будет равен:

$$|J| = (\mu_n^2 \rho)^3 T^6 / 2160.$$

Подставляя (20) и (22) в (15), зная, что $\lambda_3 = 0,5\dot{\omega}$, после несложных преобразований получим выражение для определения оценок нижних границ неравенства Крамера-Рао информационных параметров полезного сигнала (13) при воздействии негауссовских аддитивных помех с независимыми значениями, которые будут иметь следующий вид:

– для частоты

$$\sigma_{\dot{\omega}}^2 \geq \{\mu_n^2 \rho T^2 / 192\}^{-1}; \quad (22a)$$

– для производной частоты

$$\sigma_{\ddot{\omega}}^2 \geq \{\mu_n^2 \rho T^4 / 720\}^{-1}; \quad (22b)$$

– для фазы

$$\sigma_{\dot{\phi}}^2 \geq \{\mu_n^2 \rho / 9\}^{-1}. \quad (22в)$$

Если объект движется с постоянной скоростью, то есть $\dot{\omega} = 0$, то

$$\sigma_{\dot{\omega}}^2 \geq \{\mu_n^2 \rho T^2 / 12\}^{-1}; \quad (23)$$

$$\sigma_{\dot{\phi}}^2 \geq \{\mu_n^2 \rho / 4\}^{-1}. \quad (24)$$

Если начальная фаза колебания известна, а частота постоянна, то

$$\sigma_{\dot{\omega}}^2 \geq \{\mu_n^2 \rho T^2 / 3\}^{-1}. \quad (25)$$

В тех случаях, когда объект является неподвижным, то есть необходимо измерить только фазу обрабатываемого сигнала (при известной частоте)

$$\sigma_{\dot{\phi}}^2 \geq \{\mu_n^2 \rho\}^{-1}. \quad (26)$$

Если значения информационных параметров полезного сигнала принимаются равными их значениям в момент, совпадающий с серединой интервала измерения, выражение для определения элементов матрицы $\|J_{ij}\|$ будут иметь вид:

$$J_{ij} = \mu_n^2 \frac{U_m^2}{2\sigma_n^2} (-1)^{i+j-2} [(0,5T)^{i+j-2} - (-0,5T)^{i+j-2}] (i+j-1)^{-1} + I_{\phi,ij}^\lambda. \quad (27)$$

При оценке информационных параметров методом максимального правдоподобия матрица $\|J\|$ запишется:

$$\|J\| = \mu_n^2 \rho \begin{vmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{12} T^2 \\ 0 & \frac{1}{12} T^2 & 0 \\ \frac{1}{12} T^2 & 0 & \frac{1}{80} T^4 \end{vmatrix}. \quad (28)$$

Откуда $|J| = (\mu_n^2 \rho)^3 T^6 / 2160$. В этом случае:

– для частоты

$$\sigma_{\hat{\omega}}^2 \geq \{\mu_n^2 \rho T^2 / 12\}^{-1}; \quad (29a)$$

– для производной частоты

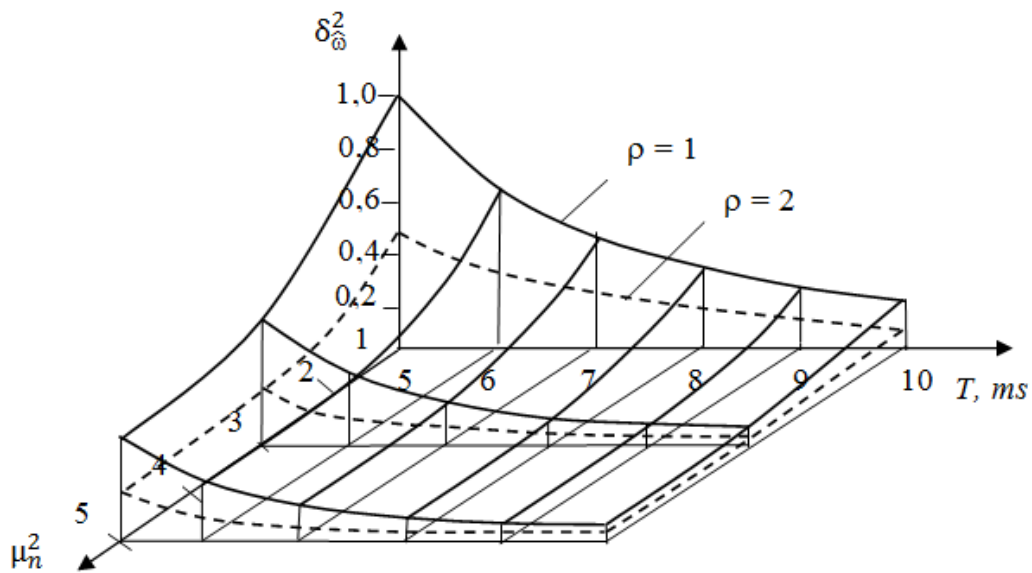
$$\sigma_{\dot{\omega}}^2 \geq \{\mu_n^2 \rho T^4 / 720\}^{-1}; \quad (29б)$$

– для фазы

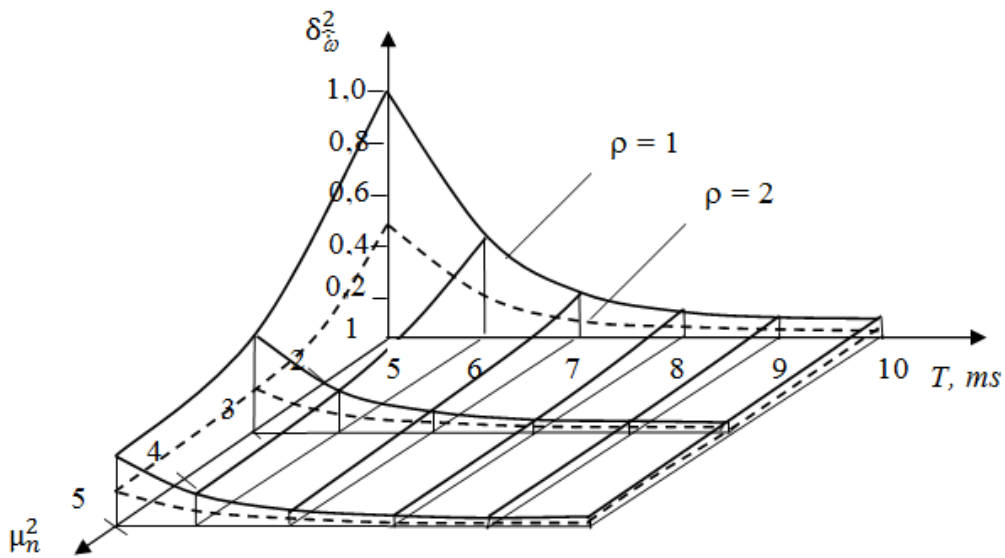
$$\sigma_{\hat{\phi}}^2 \geq \{4\mu_n^2 \rho / 9\}^{-1}. \quad (29в)$$

Сравнение (23) и (29) показывает, что нижние границы дисперсии оценок $\hat{\omega}$ и $\hat{\phi}$ значительно меньше, если привязка измерений осуществляется к середине интервала наблюдения. Повышение точности измерения при такой привязке связано с тем, что в этом случае, как видно из (28), недиагональные элементы J_{12} , J_{21} , J_{23} и J_{32} равны нулю и лишь элементы J_{13} и J_{31} отличны от него. В случае отличия от нуля недиагональных элементов в матрице $\|J\|$ следует учитывать наличие корреляционных связей между ошибками оценок отдельных измеряемых параметров.

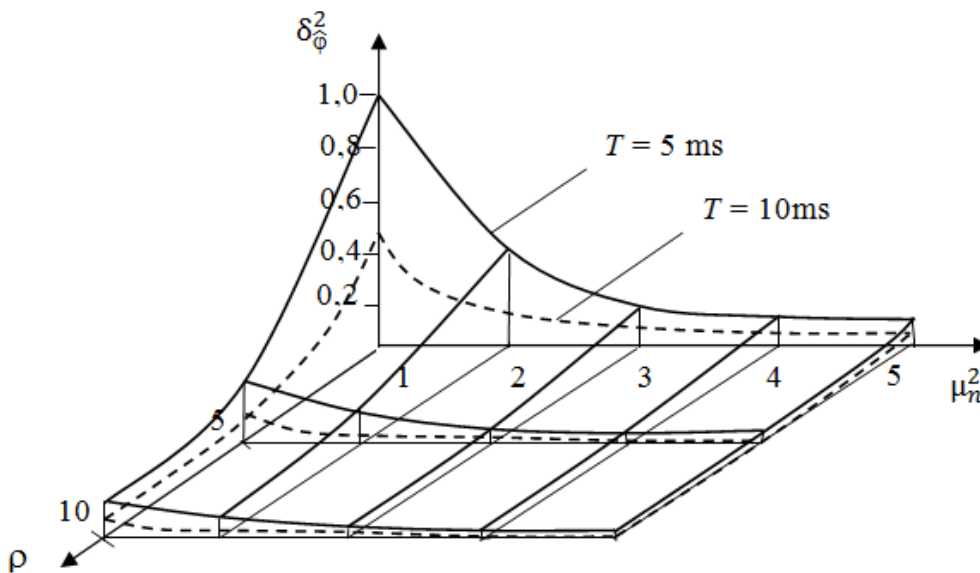
На рисунке 2 представлены зависимости, иллюстрирующие приведенные погрешности $\delta_{\hat{\lambda},n}^2 = f(\sigma_{\hat{\lambda},n}^2 / \sigma_{\hat{\lambda},n}^2)$ измерения (оценки) информационных параметров $\hat{\lambda} = \varphi, \omega, \dot{\omega}$ сигнала $(\hat{\lambda}, t_h)$, несущих информацию о параметрах движения лоцируемого объекта, для случая, когда величины φ, ω и $\dot{\omega}$ принимаются равными значениям в момент окончания интервала измерения.



a)



б)



в)

Рисунок 2 – Зависимости $\delta_{\lambda}^2 = f(T, \mu_n^2)$, где: $a - \hat{\lambda} = \hat{\omega}$; $b - \hat{\lambda} = \hat{\omega}$; ν – зависимость $\delta_{\phi}^2 = f(\mu_n^2, \rho)$

Из графиков видно, что с увеличением ρ , T и μ_n^2 приведенная погрешность измерения (оценки) уменьшается, а значит точность измерения – возрастает.

Как видно, учет негауссовского характера воздействующей аддитивной помехи позволяет значительно повысить точность оцениваемого параметра, причем, чем больше ПРВ аддитивной помехи отличается от гауссовской, тем выше получаемый выигрыш.

3. Оценка точности измерения информационных параметров сигнала на фоне коррелированных аддитивных негауссовских помех. Рассмотрим случай, когда информационный параметр оценивается на фоне коррелированной, в общем случае, негауссовской помехи. Будем считать, что помеха описывается переходной ПРВ $W_n(n_h | n_{h-1})$. Измерение (оценка) информационного параметра ведется в дискретном времени наблюдения на интервале $[0, T]$, причем $\hat{\lambda}_h = \hat{\lambda}_{h-1} = \hat{\lambda}$.

Логарифм функции правдоподобия существует и описывается выражением:

$$B_n(n) = \ln W_n \{ y_h - s(\hat{\lambda}, t_h) | y_{h-1} - s(\hat{\lambda}, t_{h-1}) \}, \quad (30)$$

где $y_{h-1} - s(\hat{\lambda}, t_{h-1}) = n_{h-1}$, $i = 0, 1$.

При этом функция правдоподобия удовлетворяет условиям регулярности [17]:

$$\left\langle \frac{\partial}{\partial \hat{\lambda}} \ln W_n \{y_h - s(\hat{\lambda}, t_h) \mid y_{h-1} - s(\hat{\lambda}, t_{h-1})\} \right\rangle = 0; \quad (31)$$

$$\left\langle \frac{\partial}{\partial \hat{\lambda}^2} \ln W_n \{y_h - s(\hat{\lambda}, t_h) \mid y_{h-1} - s(\hat{\lambda}, t_{h-1})\} \right\rangle = \left\langle \left[\frac{\partial}{\partial \hat{\lambda}} \ln W_n \{y_h - s(\hat{\lambda}, t_h) \mid y_{h-1} - s(\hat{\lambda}, t_{h-1})\} \right]^2 \right\rangle. \quad (32)$$

Запишем производную ЛФП (30) по информационному параметру в виде:

$$\left\langle \frac{\partial}{\partial \hat{\lambda}} \ln W_n \{y_h - s(\hat{\lambda}, t_h) \mid y_{h-1} - s(\hat{\lambda}, t_{h-1})\} \right\rangle = H^{-1} \sum_{h=1}^H \left[-\frac{d}{dn_h} \ln W_n(n_h \mid n_{h-1}) s'_\lambda(\hat{\lambda}, t_h) - \frac{d}{dn_{h-1}} \ln W_n(n_h \mid n_{h-1}) s'_\lambda(\hat{\lambda}, t_h) \right] = H^{-1} \sum_{h=1}^H \left[-B''_{n,h} s'_\lambda(\hat{\lambda}, t_h) - B''_{n,h-1} s'_\lambda(\hat{\lambda}, t_{h-1}) \right] \quad (33)$$

Заметим, что соотношение (31) выполняется, если

$$\left\langle \frac{d}{dn_{h-i}} \ln W_n(n_h \mid n_{h-i}) \right\rangle = 0, \quad i = 0, 1. \quad (34)$$

С учетом соотношений (32), (34), дифференцируя (33), получим

$$\left\langle \frac{\partial}{\partial \hat{\lambda}^2} \ln W_n \{y_h - s(\hat{\lambda}, t_h) \mid y_{h-1} - s(\hat{\lambda}, t_{h-1})\} \right\rangle = H^{-1} \sum_{h=1}^H \left[B''_{n,h,h} [s'_\lambda(\hat{\lambda}, t_h)]^2 + 2B''_{n,h,h-1} [s'_\lambda(\hat{\lambda}, t_h) s'_\lambda(\hat{\lambda}, t_{h-1})] + B''_{n,h-1,h-1} [s'_\lambda(\hat{\lambda}, t_{h-1})]^2 \right]. \quad (35)$$

Усреднив (35) не только б по множеству, но и по времени, используя результаты, полученные [18], преобразуем (35) к виду:

$$\tilde{B}''_\lambda = I''_{n,11} P_{11} + 2I''_{n,12} P_{12} + I''_{n,22} P_{22}. \quad (36)$$

Правая часть (36), согласно [13], представляет собой след матрицы IP

$$\text{tr}[IP] = \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 I_{ij} P_{ij}; \quad i, j = 1, 2,$$

где $I_{ij} = I''_{n,\alpha\beta}(\alpha, \beta = 1, 2)$ – составляющие информационной матрицы Фишера относительно аддитивной помехи заключенные в переходной ПРВ $W_n(n_h \mid n_{h-1})$, определенные в (29, а); P_{ij} – элементы матрицы $\|P\|$, определенные в [18]:

$$i = j; \quad P_{ij} = P_s = \lim_{H \rightarrow \infty} H^{-1} \sum_{h=1}^H [s'_i]^2;$$

$$i \neq j; \quad P_{ij} = P_s = \lim_{H \rightarrow \infty} H^{-1} \sum_{h=1}^H [s'_i s'_j] \quad i, j = 1, 2.$$

С учетом сказанного, выражение (36) можно записать в виде:

$$\tilde{B}''_\lambda = \text{tr}[IP].$$

В этом случае, выражение для нижней границы неравенства Крамера-Рао, в общем случае, запишется:

$$\sigma_{\hat{\lambda},k}^2 \geq [\text{tr}[IP] + I_\phi^\lambda]^{-1}. \quad (37)$$

При оценке измеряемого параметра методом максимального правдоподобия (37) переходит в неравенство:

$$\sigma_{\hat{\lambda},k}^2 \geq [\text{tr}[IP]]^{-1}. \quad (38)$$

Заметим, что в случае некоррелированной помехи выражения (37), (38) переходят, соответственно, в выражения (5) и (10).

Если на полезный сигнал воздействует гауссовская коррелированная помеха с переходной ПРВ вида:

$W_n(n_h|n_{h-1}) = [2\pi\sigma_{n,h}(1-r_n^2)]^{-0.5} \exp\{-(n_h - \sigma_{n,h}\sigma_{n,h-1}^{-1}r_n n_{h-1})^2 \times (2\sigma_{n,h}(1-r_n^2))^{-1}\}$,
 где $\sigma_{n,h}$ и $\sigma_{n,h-1}$ – соответственно, дисперсия величины n на шаге h и $h-1$; r_n – коэффициент корреляции выборок n_h и n_{h-1} , с учетом того, что в этом случае информационная матрица Фишера гауссовского случайного процесса $n(t)$ имеет вид [18]:

$$\|I_{\Phi,r}\| = \begin{vmatrix} I_{\Phi.11} & I_{\Phi.12} \\ I_{\Phi.21} & I_{\Phi.22} \end{vmatrix} = [\sigma_n^2(1-r_n^2)]^{-1} \begin{vmatrix} 1 & -r_n \\ -r_n & r_n^2 \end{vmatrix},$$

а так же элементов матрицы $\|P\|$, определяемых выражениями

$$P_{11} = \lim_{H \rightarrow \infty} H^{-1} \sum_{h=1}^H [s'_\lambda(\hat{\lambda}, t_h)]^2;$$

$$P_{11} = P_{21} = \lim_{H \rightarrow \infty} H^{-1} \sum_{h=1}^H [s'_\lambda(\hat{\lambda}, t_h) s'_\lambda(\hat{\lambda}, t_{h-1})];$$

$$P_{22} = \lim_{H \rightarrow \infty} H^{-1} \sum_{h=1}^H [s'_\lambda(\hat{\lambda}, t_{h-1})]^2,$$

после несложных математических преобразований, запишем (38) в виде:

$$\sigma_{\lambda,k}^2 \geq \left\{ \frac{[s'_\lambda(\hat{\lambda}, t_h) - r_n s'_\lambda(\hat{\lambda}, t_{h-1})]^2}{\sigma_n^2(1-r_n^2)} \right\}^{-1} = \left\{ \frac{[\Delta s_h]^2}{\sigma_n^2(1-r_n^2)} \right\}^{-1}. \quad (39)$$

Данное выражение, вплоть до обозначений, полностью совпадает с выражением, полученным в работах [19, 20] для случая коррелированных гауссовских помех.

Перепишем (39) в виде: $\sigma_{\lambda,k}^2 \geq [\rho_{\Gamma,k}]^{-1}$, где $\rho_{\Gamma,k} = \frac{[\Delta s_h]^2}{\sigma_n^2(1-r_n^2)}$ – величина, играющая роль ОСП при измерении информационного параметра на фоне гауссовской аддитивной помехи с дисперсией σ_n^2 и коэффициентом корреляции r_n .

В работе [21] показано, что величину $\rho_{\Gamma,k}$ необходимо рассматривать в спектральном представлении

$$\rho_{\Gamma,k} = \frac{0,5}{\pi} \int_{-\pi/\Delta t}^{\pi/\Delta t} \frac{|s_s(\omega)|^2}{s_n(\omega)} d\omega,$$

где $|s_s(\omega)|$ – амплитудный спектр сигнала; $s_n(\omega)$ – энергетический спектр помехи; $\Delta t = h - (h-1)$.

В том случае, когда аддитивная помеха сильно коррелирована $r_n \rightarrow 1$, то есть спектр $s_n(\omega)$ уже спектра $|s_s(\omega)|$, получаем, что [19]

$$|s_s(\omega)| \gg \frac{1}{2\pi s_n(0)} \int_{-\pi/\Delta t}^{\pi/\Delta t} |s_s(\omega)|^2 d\omega = P_s \sigma_n^{-2}, \quad (40)$$

где $P_s \sigma_n^{-2} = \rho_{\Gamma n}$ – обобщенное ОСП при воздействии некоррелированной гауссовской аддитивной помехи.

Как видно из (40)

$$\rho_{г.к} \gg \rho_{гн}. \quad (41)$$

Следовательно

$$\sigma_{\hat{\lambda}.г.к}^2 \ll \sigma_{\hat{\lambda}.гн}^2. \quad (42)$$

Таким образом, увеличение коэффициента корреляции приводит к увеличению обобщенного ОСП, что в свою очередь ведет к уменьшению погрешности измерения информационного параметра, а значит и к повышению точности его измерения.

Воспользовавшись материалами [14, 18], введем соотношение

$$\mu = I_{\phi}^n / I_{\phi.г}^n, \quad (43)$$

характеризующее предельную эффективность измерения (оценки) информационного параметра $\hat{\lambda}$ на фоне негауссовской помехи с переходной ПРВ $W_n(n_h | n_{h-1})$ по сравнению с оценкой при воздействии гауссовской помехи, для которой дисперсия σ_n^2 и коэффициент корреляции r_n совпадают с дисперсией и коэффициентом корреляции коррелированной гауссовской помехи [19].

Напомним, что величина I_{ϕ}^n зависит от вида ПРВ $W_n(n_h | n_{h-1})$, причем, чем больше ПРВ отличается от гауссовской, тем больше величина коэффициента μ . Для гауссовской переходной ПРВ $W_n(n_h | n_{h-1})$

$$I_{\phi.г}^n = \frac{[s'_{\lambda}(\hat{\lambda}, t_h) - r_n s'_{\lambda}(\hat{\lambda}, t_{h-1})]^2}{\sigma_n^2 (1 - r_n^2)}.$$

С учетом (38), (43) и полученного соотношения запишем, что при воздействии на полезный сигнал негауссовской коррелированной помехи апостериорная погрешность измерения (оценки) информационного параметра будет определяться следующим выражением:

$$\sigma_{\hat{\lambda}.к.нг}^2 \geq [\mu \text{tr}[IP]]^{-1} = \left\{ \frac{[s'_{\lambda}(\hat{\lambda}, t_h) - r_n s'_{\lambda}(\hat{\lambda}, t_{h-1})]^2}{\mu \sigma_n^2 (1 - r_n^2)} \right\}^{-1}.$$

Следовательно, как видно из полученного неравенства с увеличением отличия переходной ПРВ $W_n(n_h | n_{h-1})$ от гауссовской, точность измеряемого (оцениваемого) параметра возрастает.

Следует отметить, что так как [14, 20] $\mu \geq 1$, то с учетом неравенств (41) и (42) получаем, что при воздействии коррелированной негауссовской помехи апостериорная дисперсия измерения информационного параметра $\sigma_{\hat{\lambda}.к.нг}^2$ всегда меньше, чем апостериорная дисперсия при воздействии той же негауссовской помехи, но имеющей некоррелированный характер $\sigma_{\hat{\lambda}.н.нг}^2$, то есть $\sigma_{\hat{\lambda}.н.нг}^2 \gg \sigma_{\hat{\lambda}.к.нг}^2$.

Рассмотрим влияние величины коэффициента μ на оценку информационного параметра на примере приведенной погрешности измерения $\delta_{\hat{\lambda}}^2 = \sigma_{\hat{\lambda}.в}^2 / \sigma_{\hat{\lambda}.к.г}^2$, где $\sigma_{\hat{\lambda}.в}^2$ – апостериорная погрешность измерения

при воздействии коррелированной негауссовской помехи, описывающейся переходной ПРВ вида:

$$W(n_h | n_{h-1}) = \frac{\nu}{2\Gamma(\nu^{-1})\sigma} \left[\frac{\Gamma(3/\nu)}{(1-r^2)\Gamma(\nu^{-1})} \right]^{0.5} \exp \left\{ - \left[\frac{\Gamma(3/\nu)}{(1-r^2)\Gamma(\nu^{-1})} \right]^{\nu/2} \left[\frac{|n_h - rn_{h-1}|^\nu}{\sigma^\nu} \right] \right\}, \quad (44)$$

где $\Gamma(\cdot)$ – гамма функция.

В этом случае, информационная матрица имеет вид [18]:

$$\|I_\Phi\| = \frac{\nu(\nu-1)\Gamma(3/\nu)\Gamma\Gamma(1-\nu^{-1})}{\sigma_n^2\Gamma^2(1/\nu)(1-r_n^2)} \begin{vmatrix} 1 & -r_n \\ -r_n & r_n^2 \end{vmatrix} = A(\nu)I_{\Phi,\Gamma},$$

где $A(\nu) = \frac{\nu(\nu-1)\Gamma(3/\nu)\Gamma\Gamma(1-\nu^{-1})}{\Gamma^2(1/\nu)}$; $\nu \geq 2$ – константа, зависящая от параметра

ПРВ.

Тогда, согласно (43)

$$\mu = \frac{I_{\Phi}^n}{I_{\Phi\Gamma}^n} A(\nu) = \frac{\nu(\nu-1)\Gamma\left(\frac{3}{\nu}\right)\Gamma(1-\nu^{-1})}{\Gamma^2(\nu^{-1})}$$

Запишем выражение для приведенной погрешности в виде:

$$\delta_{\lambda}^2 = [\mu\rho]^{-1} = \left\{ \frac{\Gamma^2(\nu^{-1})}{[\nu(\nu-1)\Gamma\left(\frac{3}{\nu}\right)\Gamma(1-\nu^{-1})]\rho} \right\}$$

где $\rho = \rho_\nu / \rho_{k,\Gamma}$; ρ_ν – обобщенное ОСП при воздействии негауссовской помехи с ПРВ (44).

Напомним, что при $\nu = 2$ ПРВ вида (44) переходит в гауссовское [18], при этом, как видно из (43), $\mu = 1$.

На рисунке 3 показаны зависимости, из которых видно, что на приведенную погрешность измерения информационного параметра влияет не только величина ρ , играющая роль приведенного обобщенного ОСП, но и параметр ν , определяющий значение μ .

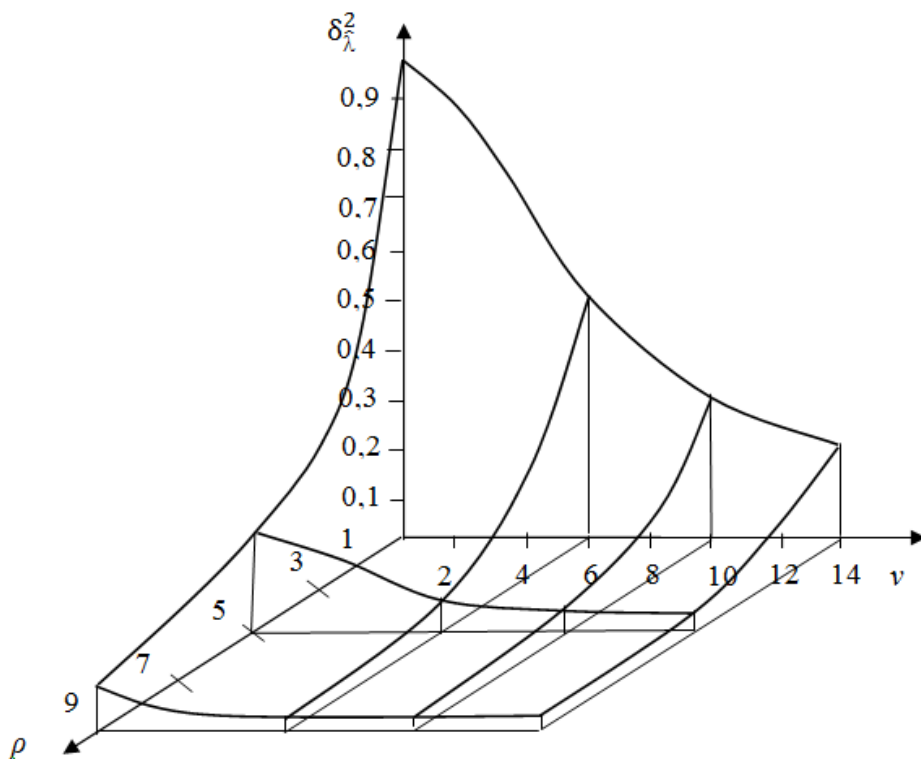


Рисунок 3 – Зависимости $\delta_\lambda^2 = f(\nu, \rho)$

Чем больше ν отлочно от 2 ($\mu = 1$), тем меньше величина приведенной погрешности.

Повторив выше изложенные рассуждения для случая совместной оценки нескольких информационных параметров полезного сигнала на фоне коррелированной, в общем случае, негауссовской помехи, приходим к выводу, что предельная эффективность измерения (оценки) (см. (43)) в этом случае является такой же, как и при измерении одного информационного параметра. При этом необходимо помнить, что величину обобщенного ОСП, входящую в выражение, определяющее оценки нижних границ неравенства Крамера-Рао (см. (15)), как это было показано выше, необходимо рассматривать в спектральном представлении.

Таким образом, осуществлена оценка точности измерения информационных параметров полезных сигналов, несущих информацию о параметрах движения лоцируемых объектов, на фоне аддитивных, в общем случае, негауссовских помех, имеющих как коррелированный, так и независимый характер. Показано, что учет негауссовского характера воздействующей аддитивной помехи приводит к значительному повышению точности измерения параметров сигнала. Показано, что в случае коррелированной негауссовской помехи увеличение коэффициента корреляции приводит к увеличению обобщенного ОСП, что, в свою очередь, ведет к повышению точности измерения параметров.

Получены инженерные оценки информационных параметров сигнала на фоне аддитивных негауссовских помех, имеющих как коррелированный, так и

независимый характер, позволяющие оценить потенциальную точность и потери в измерении параметров движения при работе радиолокационных измерителей на малых расстояниях от лоцируемых объектов. Показано, что учет негауссовского характера аддитивной помехи приводит к значительному повышению потенциальной точности измерения параметров сигнала. Так, при $\rho = 1$, $T = 10 \text{ мС}$ для аддитивной помехи с $\mu_n^2 = 2$ потенциальная точность при совместном измерении параметров сигнала увеличивается для частоты в 5 раз, для производной частоты в 10 раз, для фазы – в 2 раза. Показано, что в случае коррелированных аддитивных негауссовских помех увеличение коэффициента корреляции ведет к увеличению обобщенного ОСП, что, в свою очередь, повышает потенциальную точность измеряемых параметров.

Литература

1. Сосулин, Ю. Г. Теоретические основы радиолокации и радионавигации: учеб. пособие для вузов / Ю. Г. Сосулин // М.: Радио и связь. – 1992.
2. Финкельштейн, М. И. Основы радиолокации / М. И. Финкельштейн // М.: Радио и связь. – 1983.
3. Журавлев, А. К., Лукошкин, А. П., Поддубный, С. С. Обработка сигналов в адаптивных антенных решетках / А. К. Журавлев, А. П. Лукошкин, С. С. Поддубный // Л.: ЛГУ. – 1982.
4. Родимов, А. П., Поповских, В. В. Статистическая теория поляризационно-временной обработки сигналов и помех / А. П. Родимов, В. В. Поповских // М.: Радио и связь. – 1984.
5. Радиолокационные характеристики летательных аппаратов / под ред. Л. Т. Тучкова // М.: Радио и связь. – 1985.
6. Фалькови, С. Е., Хомяков, Э. Н. Статистическая теория измерительных радиосистем / С. Е. Фалькови, Э. Н. Хомяков // М.: Сов. Радио. – 1981.
7. Артюшенко, В. М. Исследование и разработка радиолокационного измерителя параметров движения протяженных объектов / В. М. Артюшенко // М.: ФГБОУ ВПО ФТА. – 2013.
8. Воловач, В. И. Методы и алгоритмы анализа радиотехнических устройств ближнего действия / В. И. Воловач // М.: Радио и связь. – 2013.
9. Ван Трис, Г. Теория обнаружения, оценок и модуляции Т.1. / Г. Ван Трис // М.: Сов. Радио. – 1972.
10. Островитянов, Р. В., Басалов, Ф. А. Статистическая теория радиолокации протяженных целей / Р. В. Островитянов, Ф. А. Басалов // М.: Радио и связь. – 1982.
11. Фельдман, Ю. И., Мандуровский И. А. Теория флуктуаций локационных сигналов отраженных распределенными целями / Ю. И. Фельдман, И. А. Мандуровский // М.: Радио и связь. – 1983.
12. Тихонов, В. И. Оптимальный прием сигналов / В. И. Тихонов // М.: Радио и связь. – 1983.
13. Левин, Б. Р. Теоретические основы статистической радиотехники. Т.3. / Б. Р. Левин // М.: Сов. Радио. – 1975.

-
14. Новоселов, О. Н., Фомин, А. Ф. Основы теории и расчета информационно-измерительных систем: 2-е изд., перераб. и доп. / О. Н. Новоселов, А. Ф. Фомин // М.: Машиностроение. – 1991.
 15. Тузов, Г. И. Выделение и обработка информации в доплеровских системах / Г. И. Тузов // М.: Сов. Радио. – 1967.
 16. Тихонов, В. И. Статистическая радиотехника: 2-е изд. перераб. и доп. / В. И. Тихонов // М.: Сов. Радио. – 1982.
 17. Валеев, В. Г. Помехоустойчивость радиотехнических измерительных систем / В. Г. Валеев // Свердловск: Изд-во УПИ. – 1987.
 18. Артюшенко, В. М. Обработка информационных параметров сигнала в условиях аддитивно-мультипликативных негауссовских помех / В. М. Артюшенко // Королев МО: Изд-во «Канцлер». – 2013.
 19. Валеев, В. Т., Сосулин, Ю. Г. Обнаружение слабых когерентных сигналов в коррелированных негауссовских помехах / В. Т. Валеев, Ю. Г. Сосулин // Радиотехника и электроника. – 1969. – т. 14. – № 2. – С. 230–238.
 20. Валеев, В. Г. Оптимальная оценка параметров сигнала при наличии негауссовских помех / В. Г. Валеев // Изв. АН СССР. Техническая кибернетика. – 1974. – №2. – С. 135–146.
 21. Вайштейн, Л. А., Зубаков, В. Д. Выделение сигналов на фоне случайных помех / Л. А. Вайштейн, В. Д. Зубаков // М.: Сов. Радио. – 1960.