УДК 539.3

Метод определения прогибов круглых пластин под действием гармонической поперечной нагрузки

А.С. Кравчук, доктор физико-математических наук, доцент,
ведущий научный сотрудник,
лаборатория «Динамика систем и механика материалов»,
Научно-исследовательский политехнический институт,
филиал Белорусского национального технического университета, г. Минск,
А.И. Кравчук, кандидат физико-математических наук, доцент,
доцент кафедры веб-технологий и компьютерного моделирования,
Белорусский государственный университет, г. Минск

Впервые решена задача изгиба круглой пластины под действием гармонического распределения интенсивности поперечной нагрузки. Впервые решение построено методом понижения порядка дифференциального оператора в уравнении прогибов пластины с четвертого до второго, что дало возможность разбить решение задачи на два этапа, на первом удовлетворить краевые условия равенства нулю вертикальных перемещений пластины и гладкости ее прогибов в центре, а на втором удовлетворить условию защемления края или равенства нулю изгибающего момента по краю пластины.

Круглая пластина, гармоническая поперечная нагрузка, понижение порядка дифференциального оператора, прогиб.

Method for determining deflections of round plates under the action of harmonic transverse load

A.S. Kravchuk, Doctor Phys.-Mat. Sci., Associate professor, Leading Researcher,
Laboratory «Dynamics of Systems and Mechanics of Materials»,
Polytechnic Research Institute,
a branch of the Belarusian National Technical University, Minsk,
A.I. Kravchuk, Candidate Phys.-Mat. Sci., Associate Professor, Associate Professor, Department of web technologies and computer modeling
of the Belarusian State University, Minsk

For the first time, the problem of bending a circular plate under the action of the harmonic distribution of the intensity of a transverse load was solved. For the first time, the solution was constructed by lowering the order of the differential operator in the plate deflections equation from fourth to second order, which made it possible to divide the solution of the problem into two stages. At the first stage, the boundary conditions for the equality to zero of vertical displacements of the plate and the smoothness of its deflections in the center were satisfied. At the second stage, either the edge pinching condition or zero bending moment condition on the edge of the plate was satisfied.

Round plate, harmonic transverse load, lowering the order of the differential operator, deflection.

Введение. Бигармонические уравнения, представляющие собой дифференциальные уравнения в частных производных 4-го порядка, играют важную роль в механике сплошных сред при моделировании поведения упругих пластин под нагрузкой [1, 2]. Это объясняется тем, что решения бигармонического уравнения имеют тесную связь с основными величинами, изучаемыми в теории упругости (напряжения и смещения), а интегрирование бигармонического уравнения составляет одну из основных задач теории упругости [3, 4].

Под гармоническим нагружением круглой пластины авторы понимают поперечную нагрузку, удовлетворяющую уравнению Лапласа в полярных координатах. Данный вид нагружения не рассматривался ранее в литературе, а полученное авторами решение не совпадает с общим решение Клебша для круглой пластины, изгибающейся под действием произвольной нагрузки [5, с. 111-112]. Это подчеркивает самостоятельную значимость полученных теоретических результатов.

Установлено, что необходимо дополнительное краевое условие о гладкости прогибов пластины в ее центре иначе единственного физически адекватного решения получить невозможно.

Несмотря на обилие работ, посвященных решению бигармонического уравнения, до настоящего времени никто не использовал метод понижения порядка бигармонического оператора до гармонического. Хотя это дает возможность существенно повысить наглядность изложения результатов, с помощью разбиения решения уравнений прогибов круглой пластины на два этапа: первый удовлетворение условий равенства нулю перемещений на краю пластины и гладкости решения в ее центре, а второй – удовлетворение условий защемления или равенства нулю изгибающего момента на краю пластины.

Общие уравнения изгиба круглой пластины, нагруженной поперечной нагрузкой. Рассматривается круглая пластина радиуса R и толщиной h с центром в начале полярных координат [4, с. 194; 5, с.110]:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\cdot\frac{\partial}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\cdot\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}\right)\left(\frac{\partial^2 w}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\cdot\frac{\partial w}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\cdot\frac{\partial^2 w}{\partial\theta^2}\right)=\frac{q(r,\theta)}{D}, \qquad (1)$$

где $w(r,\theta)$ функция поперечных перемещений круглой пластины (вдоль оси $0z$), $q(r,\theta)$ – интенсивность поперечной нагрузки, удовлетворяющая гармоническому уравнению:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\cdot\frac{\partial}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\cdot\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}\right)q(r,\theta)=0. \qquad (2)$$

Цилиндрическая жесткость пластины D определяется уравнением [4, с.178]:

$$D=\frac{E\cdot h^3}{12\cdot\left(1-\nu^2\right)}.$$

При этом одними из краевых условий является опирание по краю и условие гладкости решения в центре пластины:

$$w(R,\theta)=0, \quad \left.\frac{\partial w(r,\theta)}{\partial r}\right|_{r=0}=0 \qquad . \qquad (3)$$

Условие гладкости решения краевой задачи (3) для уравнения (1) никогда не обсуждалось ранее [4, с. 196-197; 5 с.111], тем не менее, это одно из основных условий без которых невозможно построить однозначного физически адекватного решения никакой из задач для изгиба круглых пластин.

Дополнительные краевые условия, определяющие характер опирания будут рассматриваться ниже при окончательном определении вида решения.

Учитывая, что $q(r,\theta)$ являются гармонической функцией (2), то используя известные свойства аналитических функций комплексного переменного [6], ее можно представить в виде сходящегося ряда:

$$q(r,\theta)=A_0+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{r^n}{R^n}\cdot(A_n\cdot\cos(n\cdot\theta)+B_n\cdot\sin(n\cdot\theta)), \qquad (4)$$

где A_n $(n=\overline{0,\infty})$, B_n $(1=\overline{0,\infty})$ – вещественные константы.

Понизим порядок с помощью замены. Замена, понижающая порядок дифференцирования в бигармоническом уравнении (1) до гармонического, имеет вид:

$$w(r,\theta)=W(r,\theta)\cdot\left(r^2+C\right), \qquad (5)$$

где $W(r,\theta)$ – некоторая функция двух переменных, C – вещественная константа, которая будет определяться из второго краевого условия, определяющего защемление, шарнирное опирание [5, с. 111].

Простой заменой декартовых координат на полярные в бигармоническом уравнении [4, с. 87; 7, с. 20-21] учитывая очевидные равенства $x=r\cdot\cos(\theta)$, $y=r\cdot\sin(\theta)$, $\frac{1}{\partial x}=\frac{\cos(\theta)}{\partial r}$ и $\frac{1}{\partial y}=\frac{\sin(\theta)}{\partial r}$ и подставляя (5) в (1) можно получить:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\cdot\frac{\partial}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\cdot\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}\right)\left(\frac{\partial^2 w}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\cdot\frac{\partial w}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\cdot\frac{\partial^2 w}{\partial\theta^2}\right)= \qquad (6)$$

$$=16\cdot\left(\frac{\partial^2 W}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\cdot\frac{\partial W}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\cdot\frac{\partial^2 W}{\partial\theta^2}\right)+8\cdot r\cdot\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial^2 W}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\cdot\frac{\partial W}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\cdot\frac{\partial^2 W}{\partial\theta^2}\right)+$$

$$+\left(r^2+C\right)\cdot\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\cdot\frac{\partial}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\cdot\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}\right)\left(\frac{\partial^2 W}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\cdot\frac{\partial W}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\cdot\frac{\partial^2 W}{\partial\theta^2}\right).$$

Будем рассматривать еще одну гармоническую функцию $q_0(r,\theta)$, т.е. функцию удовлетворяющую уравнению (2) внутри круга, занимаемого пластиной. Ее также можно представить в виде сходящегося ряда:

$$q_0(r,\theta)=A_0^*+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{r^n}{R^n}\cdot\left(A_n^*\cdot\cos(n\cdot\theta)+B_n^*\cdot\sin(n\cdot\theta)\right), \qquad (7)$$

где A_n^* $(n=\overline{0,\infty})$, B_n^* $(1=\overline{0,\infty})$ - вещественные константы.

Пусть

$$\frac{\partial^2 W}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\cdot\frac{\partial W}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\cdot\frac{\partial^2 W}{\partial \theta^2}=\frac{q_0(r,\theta)}{D}. \tag{8}$$

Тогда, учитывая (1), (6), (8), функция $q_0(r,\theta)$ должна удовлетворять дифференциальному уравнению:

$$16\cdot q_0(r,\theta)+8\cdot r\cdot\frac{\partial q_0(r,\theta)}{\partial r}=q(r,\theta).$$

Общее решение последнего можно записать:

$$q_0(r,\theta)=\frac{C_1}{r^2}+\frac{1}{8\cdot r^2}\int_0^r \xi\cdot q(\xi,\theta)d\xi. \tag{9}$$

Исходя из сделанных предположений, $q_0(r,\theta)$ является вещественной частью аналитической в круге радиуса R функцией, а, следовательно, ограничена в рассматриваемой области. Из этого следует, что $C_1=0$.

Из (9) следует, что коэффициенты сходящихся рядов $q(r,\theta)$ (4) и $q_0(r,\theta)$ (7) связаны равенствами:

$$A_n^*=\frac{1}{8\cdot(n+2)}A_n\ (n=0,\infty),\qquad B_n^*=\frac{1}{8\cdot(n+2)}B_n\ (n=1,\infty). \tag{10}$$

Очевидно, что преобразование (10) не ухудшает сходимость соответствующего ряда для $q_0(r,\theta)$ (7) по сравнению со сходимостью ряда для $q(r,\theta)$ (4).

Таким образом, исходное уравнение (1) сведено к уравнению (8). При этом из (3) и (5) следуют краевые условия для $W(r,\theta)$:

$$W(R,\theta)=0,\ \left.\frac{\partial W(r,\theta)}{\partial r}\right|_{r=0}=0. \tag{11}$$

Будем в дальнейшем считать, что:

$$W(r,\theta)=\psi_0(r)+\sum_{n=1}^{\infty}\psi_n(r)\cdot\left(A_n^*\cdot\cos(n\theta)+B_n^*\cdot\sin(n\theta)\right), \tag{12}$$

где $\psi_n(r)$ – вещественные функции одной переменной.

Учитывая (7), (10) и (12), будем считать, что $\psi_n(r)$ должна удовлетворять одному из уравнений:

$$\frac{\partial^2\psi_0(r)}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\cdot\frac{\partial\psi_0(r)}{\partial r}=\frac{A_0}{16\cdot D}, \tag{13}$$

$$\frac{\partial^2\psi_n(r)}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\cdot\frac{\partial\psi_n(r)}{\partial r}-\frac{n^2}{r^2}\cdot\frac{\partial^2\psi_n(r)}{\partial\theta^2}=\frac{r^n}{D\cdot R^n}\,(n=1,\infty). \qquad (14)$$

При этом для $\psi_n(r)$ выполняются краевые условия:

$$\psi_n(R)=0\,,\ \left.\frac{d\psi_n(r)}{dr}\right|_{r=R}=0\ \ (n=0,\infty). \qquad (15)$$

Построение решения задачи для постоянной нагрузки для различных краевых условий. Пусть на пластину действует поперечная нагрузка интенсивности $q(r)=A_0$, тогда уравнение (1) с краевыми условиями (3) можно свести к уравнению (13). С естественными краевыми условиями $\psi_0(R)=0$, $\left.\frac{d\psi_0(r)}{dr}\right|_{r=0}=0$ уравнение (13) имеет единственное решение вида:

$$\psi_0(r)=\frac{A_0}{64\cdot D}\left(r^2-R^2\right).$$

С помощью (5), (12) запишем общее решение поставленной задачи:

$$w(r)=\frac{A_0}{64\cdot D}\cdot\left(r^2-R^2\right)\cdot\left(r^2+C\right). \qquad (16)$$

Константу C определим исходя из дополнительных условий на контуре круглой пластины. Если рассмотреть самое простое условие защемления края круговой пластины [4, с. 197; 5, с.111]:

$$\left.\frac{dw(r)}{dr}\right|_{r=R}=0\,, \qquad (17)$$

то из (16), (17) не сложно получить уравнение:

$$\frac{A_0}{32\cdot D}R\cdot\left(C+R^2\right)=0\,.$$

Откуда следует, что $C=-R^2$. Таким образом, при защемленном крае можно получить окончательное известное решение [4, с. 197; 5, с.113]:

$$w(r)=\frac{A_0}{64\cdot D}\cdot\left(r^2-R^2\right)^2. \qquad (18)$$

Если рассмотреть шарнирное опирание [4, с. 196; 5, с.111], то дополнительным краевым условием к условию (2) будет равенство нулю момента на краю круглой пластины $M_r\big|_{r=R}=0$. При осесимметричной нагрузке это можно записать следующим образом [4, с. 195; 5, с.110]:

$$M_r\big|_{r=R}=-D\cdot\left.\left(\frac{d^2w}{dr^2}+\frac{\nu}{r}\cdot\frac{dw}{dr}\right)\right|_{r=R}=0\,,$$

где ν – коэффициент Пуассона материала пластины.

После преобразований из (18) можно получить уравнение:

$$\frac{A_0}{32 \cdot D}\left(C(1+\nu)+R^2(5+\nu)\right)=0.$$

Таким образом, при шарнирном опирании можно получить окончательное известное решение [4, с. 196, 5 с.113]:

$$w(r)=\frac{A_0}{64 \cdot D} \cdot \left(r^2-R^2\right) \cdot \left(r^2-R^2\frac{5+\nu}{1+\nu}\right). \qquad (19)$$

Поперечная гармоническая нагрузка, имеющая первую степень радиальной координаты. Пусть на пластину действует поперечная нагрузка интенсивности $q(r,\theta)=\frac{r}{R} \cdot \left(A_1 \cdot \cos(\theta)+B_1 \cdot \cos(\theta)\right)$, тогда уравнение (1) с краевыми условиями (3) можно свести к уравнению (14) при $n=1$:

$$\frac{\partial^2\psi_1(r)}{\partial r^2}+\frac{1}{r} \cdot \frac{\partial\psi_1(r)}{\partial r}-\frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial^2\psi_1(r)}{\partial\theta^2}=\frac{r}{D \cdot R}.$$

Последнее уравнение с краевыми условиями (15) $\psi_1(R)=0$, $\left.\frac{d\psi_1(r)}{dr}\right|_{r=0}=0$ имеет решение в виде:

$$\psi_1(r)=\frac{r^2-R^2}{8 \cdot D} \cdot \frac{r}{R}.$$

С помощью (5), (10) и (12) запишем полное решение поставленной задачи:

$$w(r)=\frac{r^2-R^2}{192 \cdot D} \cdot \frac{r}{R} \cdot \left(r^2+C\right) \cdot \left(A_1 \cdot \cos(\theta)+B_1 \cdot \sin(\theta)\right).$$

В случае защемления края круговой пластины [4, с. 197; 5, с.111] должно выполняться условие (17). Тогда не сложно получить уравнение:

$$\frac{R}{4 \cdot D} \cdot \left(C+R^2\right)=0.$$

Откуда следует, что $C=-R^2$. Таким образом, при защемленном крае при рассматриваемом распределении интенсивности нагрузки можно получить окончательное решение в виде:

$$w(r)=\frac{\left(r^2-R^2\right)^2}{192 \cdot D} \cdot \frac{r}{R} \cdot \left(A_1 \cdot \cos(\theta)+B_1 \cdot \sin(\theta)\right). \qquad (20)$$

В случае свободного края пластины должно выполняться краевое условие [5 с.110]:

$$M_r\Big|_{r=R} = -D\cdot\left(\frac{d^2w}{dr^2}+\frac{\nu}{r}\cdot\left(\frac{dw}{dr}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 w}{\partial\varphi^2}\right)\right)\Bigg|_{r=R} = 0. \qquad (21)$$

Тогда из (21) можно получить равенство:

$$C = -R^2\,\frac{7+\nu}{3+\nu}.$$

В окончательном виде получаем решение для шарнирного опирания пластины под действием рассматриваемой нагрузки:

$$w(r) = \frac{r^2-R^2}{192\cdot D}\cdot\frac{r}{R}\cdot\left(r^2-R^2\,\frac{7+\nu}{3+\nu}\right)\cdot\left(A_1\cdot\cos(\theta)+B_1\cdot\sin(\theta)\right). \qquad (22)$$

Гармоническое нагружение, имеющее в представлении вторую степень радиальной координаты. Пусть на пластину действует поперечная нагрузка интенсивности $q(r,\theta)=\dfrac{r^2}{R^2}\cdot\left(A_2\cdot\cos(2\cdot\theta)+B_2\cdot\cos(2\cdot\theta)\right)$, тогда уравнение (1) с краевыми условиями (3) можно свести к уравнению (14), которое запишется в виде:

$$\frac{\partial^2\psi_2(r)}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\cdot\frac{\partial\psi_2(r)}{\partial r}-\frac{4}{r^2}\cdot\frac{\partial^2\psi_2(r)}{\partial\theta^2}=\frac{r^2}{D\cdot R^2}. \qquad (23)$$

С краевыми условиями (15) $\psi_2(R)=0$, $\left.\dfrac{d\psi_2(r)}{dr}\right|_{r=0}=0$ уравнение (23) имеет решение:

$$\psi_2(r)=\frac{r^2-R^2}{12\cdot D}\cdot\frac{r^2}{R^2}.$$

С помощью (5), (10) и (12) запишем полное решение поставленной задачи:

$$w(r)=\frac{r^2-R^2}{384\cdot D}\cdot\frac{r^2}{R^2}\cdot\left(r^2+C\right)\cdot\left(A_2\cdot\cos(2\cdot\theta)+B_2\cdot\sin(2\cdot\theta)\right).$$

В случае защемления края круговой пластины [4, с. 197; 5, с.111] должно выполняться условие (17). Откуда, как не сложно заметить, следует равенство $C=-R^2$.

Таким образом, при защемленном крае круглой пластины в этом случае можно получить окончательное решение в виде:

$$w(r)=\frac{\left(r^2-R^2\right)^2}{384\cdot D}\cdot\frac{r^2}{R^2}\cdot\left(A_2\cdot\cos(2\cdot\theta)+B_2\cdot\cos(2\cdot\theta)\right). \qquad (24)$$

В случае свободного края пластины должно выполняться краевое условие (21) [5, с.110]. Откуда можно получить уравнение:

$$C=-R^2\,\frac{9+\nu}{5+\nu}.$$

В окончательном виде получаем решение для шарнирного опирания пластины под действием рассматриваемой нагрузки:

$$w(r)=\frac{r^2-R^2}{384\cdot D}\cdot\frac{r^2}{R^2}\cdot\left(r^2-R^2\,\frac{9+\nu}{5+\nu}\right)\cdot\left(A_2\cdot\cos(2\cdot\theta)+B_2\cdot\sin(2\cdot\theta)\right). \qquad (25)$$

Решение для гармонического нагружения, имеющего в представлении третью степень радиальной координаты. Пусть на пластину действует поперечная нагрузка интенсивности $q(r,\theta)=\frac{r^3}{R^3}\cdot\left(A_3\cdot\cos(3\cdot\theta)+B_3\cdot\cos(3\cdot\theta)\right)$, тогда уравнение (1) с краевыми условиями (3) можно свести к уравнению (14), которое запишется в виде:

$$\frac{\partial^2\psi_3(r)}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\cdot\frac{\partial\psi_3(r)}{\partial r}-\frac{9}{r^2}\cdot\frac{\partial^2\psi_3(r)}{\partial\theta^2}=\frac{r^3}{D\cdot R^3}. \qquad (26)$$

С краевыми условиями (15) $\psi_3(R)=0$, $\left.\frac{d\psi_3(r)}{dr}\right|_{r=0}=0$ уравнение (26) имеет решение в виде:

$$\psi_3(r)=\frac{r^2-R^2}{16\cdot D}\cdot\frac{r^3}{R^3}.$$

С помощью (5), (10) и (12) запишем полное решение поставленной задачи:

$$w(r)=\frac{r^2-R^2}{640\cdot D}\cdot\frac{r^3}{R^3}\cdot\left(r^2+C\right)\cdot\left(A_3\cdot\cos(3\cdot\theta)+B_3\cdot\sin(3\cdot\theta)\right).$$

В случае защемления края круговой пластины [4, с. 197; 5, с.111] должно выполняться условие (17). Откуда не сложно заметить, что следует равенство $C=-R^2$.

Таким образом, при защемленном крае можно получить окончательное решение в виде:

$$w(r)=\frac{\left(r^2-R^2\right)^2}{640\cdot D}\cdot\frac{r^3}{R^3}\cdot\left(A_3\cdot\cos(3\cdot\theta)+B_3\cdot\sin(3\cdot\theta)\right). \qquad (27)$$

В случае свободного края пластины должно выполняться краевое условие (21) [5, с.110]. Откуда можно получить уравнение:

$$C=-R^2\,\frac{11+\nu}{7+\nu}.$$

В окончательном виде получаем решение для шарнирного опирания пластины под действием рассматриваемой нагрузки:

$$w(r)=\frac{r^2-R^2}{640\cdot D}\cdot\frac{r^3}{R^3}\cdot\left(r^2-R^2\frac{11+\nu}{7+\nu}\right)\cdot\left(A_3\cdot\cos(3\cdot\theta)+B_3\cdot\sin(3\cdot\theta)\right). \qquad (28)$$

Произвольная n-я степень радиальной координаты в представлении гармонической нагрузки. Исходя из подготовительных вычислений, проделанных в пунктах 4-6, можно записать решение для произвольной степени n радиальной координаты в представлении гармонической нагрузки.

Таким образом, решение уравнения (14) с краевыми условиями (15) для произвольного n определяется формулой:

$$\psi_n(r)=\frac{r^2-R^2}{4\cdot(n+1)\cdot D}\cdot\frac{r^n}{R^n}.$$

Тогда решение для защемленной по краю пластины (17) по аналогии с (20), (24), (27) примет вид:

$$w(r)=\frac{\left(r^2-R^2\right)^2}{D}\frac{r^n}{R^n}\cdot\frac{A_n\cdot\cos(n\cdot\theta)+B_n\cdot\sin(n\cdot\theta)}{32\cdot(n+1)\cdot(n+2)}, \qquad (29)$$

а в случае шарнирного опирания по аналогии с (22), (25), (28) можно записать:

$$w(r)=\frac{\left(r^2-R^2\right)}{D}\cdot\frac{r^n}{R^n}\cdot\left(r^2-R^2\frac{5+2\cdot n+\nu}{1+2\cdot n+\nu}\right)\cdot\frac{A_n\cdot\cos(n\cdot\theta)+B_n\cdot\sin(n\cdot\theta)}{32\cdot(n+1)\cdot(n+2)}. \qquad (30)$$

Построение общего решения для интенсивности нагрузки в виде разложения в бесконечный ряд. Из (18), (29) следует, что общее решение в случае защемления пластинки по краю для нагрузки в виде ряда (4) будет иметь вид:

$$w(r)=\frac{\left(r^2-R^2\right)^2}{D}\cdot\left(\frac{A_0}{64}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{r^n}{R^n}\frac{A_n\cdot\cos(n\cdot\theta)+B_n\cdot\sin(n\cdot\theta)}{32\cdot(n+1)\cdot(n+2)}\right).$$

В случае шарнирного опирания пластинки по краю, принимая во внимание решения (19), (30) можно записать общее решение для нагрузки в виде ряда (4):

$$w(r)=\frac{\left(r^2-R^2\right)}{D}\left(\frac{A_0}{64}\left(r^2-R^2\frac{5+\nu}{1+\nu}\right)+\right.$$
$$\left.+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{r^n}{R^n}\left(r^2-R^2\frac{5+2\cdot n+\nu}{1+2\cdot n+\nu}\right)\cdot\frac{A_n\cdot\cos(n\cdot\theta)+B_n\cdot\sin(n\cdot\theta)}{32\cdot(n+1)\cdot(n+2)}\right)\right).$$

Заключение. Впервые решена задача изгиба круглой пластинки под действием гармонического распределения интенсивности поперечной нагрузки.

Установлено, что необходимо дополнительное краевое условие гладкости прогибов пластины в ее центре, иначе единственного физически адекватного решения получить невозможно.

Впервые решение построено методом понижения порядка дифференциального оператора с четвертого до второго, что дало возможность разбить решение задачи на два этапа, на первом удовлетворялись краевые условия равенства нулю вертикальных перемещений пластины и гладкости прогибов пластины в центре, а на втором - условие защемления или равенства нулю изгибающего момента по краю.

Частное решение, полученное для поперечной нагрузки постоянной интенсивности, полностью совпало с известными результатами.

Решение, построенное в данной статье в явном виде, не следует из общего известного решения Клебша, приведенного в монографии [5, с.111-112], что подчеркивает самостоятельную теоретическую значимость результатов данного исследования.

Литература

1. Ряжских В.И., Слюсарев М.И., Попов М.И. Численное интегрирование бигармонического уравнения в квадратной области // Вестник санкт-петербургского университета. Сер. 1. 2013. Вып. 1. С. 52-62.
2. Антропова Н.А. Применение представлений Альманси в численном исследовании математических моделей, описываемых гармоническим и бигармоническим уравнениями: диссертация ... кандидата физико-математических наук: 05.13.18. Челябинск, 2013. 141 с.
3. Гахов Ф.Д. Краевые задачи // М.: Наука, 1977. 640 с.
4. Жемочкин Б.Н. Теория упругости // М.: Гостройиздат, 1957. 257 с.
5. Журавков М.А., Старовойтов Э.И. Механика сплошных сред. Теория упругости и пластичности // Минск: БГУ, 2011. 543 с.
6. Лаврентьев М.А., Шабат Б.В. Методы теории функций комплексного переменного // М.: Наука, 1973. 749 с.
7. Арамонович И.Г., Левин В.И. Уравнения математической физики // М.: Наука, 1969. 287 с.